Exercice N°6

1-/ Soit la fonction **f** définie sur [**0** , **1** [par **f (x) =** $\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ et soit ($\mathscr{C}$) sa courbe représentative de un repère orthonormé$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

a-) Etudier la dérivabilité de **f** à droite en **0** .Interprétation géométrique ?

b-) Dresser le tableau de variation de **f**.

c-) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$

d-) Montrer que pour **x** de $[0,+\infty[$; $f^{-1}(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

e-) Tracer ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}$') courbe de la fonction f^{-1} dans le même repère$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

2-/Soit **A** l'aire du domaine limité par la courbe ($\mathscr{C}$) et les droites d'équations respectives :

x=0 et **y=1**. Montrer que **A=** $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}$ **dx** .

3-/On considère la suite $(u_n)_n$ définie sur **IN** par $u_n = \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$.

a-) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est décroissante.

b-) Prouver que la suite est convergente.

c-) Montrer que pour tout **n** de **IN** ,**0**$\leq u_n \leq \frac{1}{2n+1}$, puis déduire la limite de la suite.

4-/ On considère la suite $(v_n)_n$ définie sur **IN** par $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots\ldots+\frac{(-1)^k}{2k+1}$

a-) Montrer que $1 - t^2 + t^4 + \ldots\ldots + (-1)^n t^{2n} - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$.

b-) En intégrant l'égalité précédente montrer que ∀**n** de **IN**; $v_n - I = (-1)^n u_n$. où $I = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$

c-) Montrer que $|v_n - I| \leq \frac{1}{2n+1}$ puis déduire la laimite de la suite $(v_n)_n$

d-) Calculer v_3 puis donner une valeur approchée de **I**